

写像類群 —トポロジストが考える図形の対称性のはなし—

古宇田 悠哉

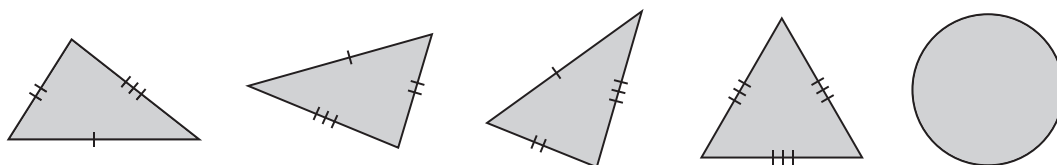
広島大学大学院理学研究科

概要

花や雪の結晶は自然が作り出す神秘の美しさを秘めています。ほんの僅かの間にしか存在しない儚さを伴って、その美しさは一層際立ちます。ここではこれらの「形」の持つ美しさに注目します。美しさというものを簡単に数学にってしまうことには少し抵抗がありますから、言葉を変えますと、これらは非常に「整った」形をしています。もう少し洗練された表現を使うと、これらは多くの対称性を持っているといえます。本稿の前半では対称性を記述する数学概念である「群」について説明します。後半ではトポロジーという数学の分野の視点で図形の対称性を記述する「写像類群」を紹介します。形が異なればその対称性も一般には変わりますが、同じ図形に対してでも、それを眺める数学的視点が異なれば、「対称性」という言葉の持つ意味も変わってくるというお話をしたいと思います。

1 図形の対称性

唐突ですが、下に描かれた図形はどれとどれが「同じ」でしょうか？



ほとんどの方はきっと意識したことはないと思いますが、図形を数学的にきちんと扱うときには、まずはじめにどの図形とどの図形が「同じ」かという基準を決めておく必要があります。中学や高校で習う「通常」の幾何学（ユークリッド幾何学）では、この基準が合同変換によって与えられています。ここで、**合同変換**とは長さを変えない移動のことをいいます。もう少し詳しく述べますと、平面や空間上の変換（移動）であって、任意の2点間の距離が、移動後の2点間の距離と等しい変換のことをいいます。例えば、平面の場合には

線対称移動

回転移動

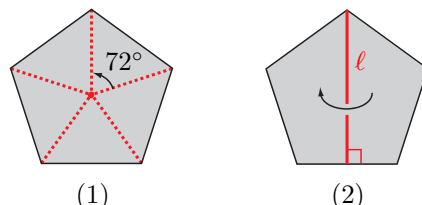
平行移動

はどれも合同変換で、実は、逆にこれらの組み合わせることによってどんな合同変換でも作ることができます。そして、ユークリッド幾何学では、一方の図形を合同変換でうつすことで他方の図形にぴったり重ね合わせることができるので、これら2つは「同じ」図形だとみなすのです。この基準に基づいてもう一度上の図形を眺めてみると、左の3つの3角形はそれぞれ同じですが、これらと残りの2つ（正3角形と円）はそれぞれ異なる図形だということができます。

ところで、「何も動かさない」という変換（**恒等変換**） e は明らかに合同変換ですので、ある図形 X が与えられると、その図形 X は自分自身と「同じ」図形です（当たり前ですね）。それでは、 X を X 自身にうつす合同変換は恒等変換以外にもあるのでしょうか？ あるとしたらどのくらいあるのでしょうか？ それらはどの様に記述されるのでしょうか？ 本章では X として正5角形と円を例にとり、これらの問いについて考えてみたいと思います。これはつまり「図形 X にはどのような対称性があるのか？」という問いに対する数学的な考察です。

1.1 正 5 角形の対称性

正 5 角形 R を R 自身にうつす合同変換全体の集まり D_5 を考えてみます. 先にも書きましたが, まず恒等変換 e は「何も動かさない」という変換のことでしたから, 当然 R を R 自身にうつす合同変換です. また, 中心のまわりの 72 度回転 (下図の (1)) を r とおくと, r も R を R 自身にうつす合同変換です. さらに, (2) にある直線 ℓ に関する線対称移動を t とおくと, t も R を R 自身にうつす合同変換です.

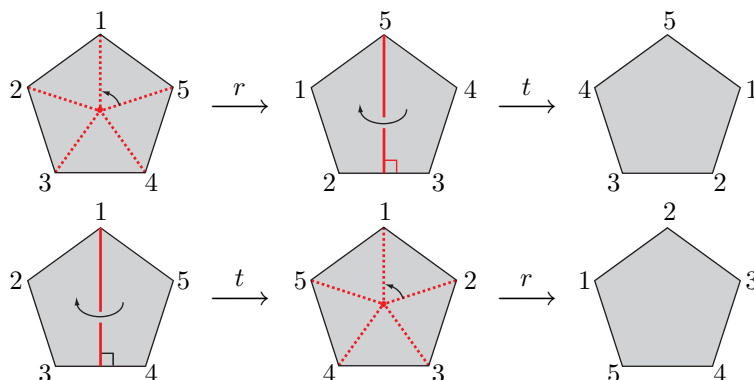


R の合同変換はこれだけでしょうか? まだまだあります. 変換 r を続けて 2 回施すことによって得られる変換を, 積のように rr あるいは r^2 と表すことにします. 一般に, r を続けて n 回施すことによって得られる変換を r^n と表すことにします. すると, r^2 は中心のまわりの 144 度回転, r^3 は 216 度回転, r^4 は 288 度回転となり, それぞれ R の合同変換になっています. r^5 は中心のまわりの 360 度回転を表しますが, これは何も動かしていないのと同じですので, $r^5 = e$ が成り立ちます. 変換 t について同様のことを考えると, $t^2 = e$ となることに気付くでしょう.

変換 r を施した後に変換 t を施すことも, 積のように rt と表すことにすると, rt, r^2t, r^3t, r^4t などそれぞれ R を R 自身にうつす合同変換です. 正 5 角形 R の頂点の行先を考えると, 結局 R を R 自身にうつす合同変換の集まりは

$$D_5 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, t, rt, r^2t, r^3t, r^4t\}$$

と表せることが確かめられます. このように書くと, r と t を組み合わせれば $rtr, rtrt, r^2tr^3tr^2t$ など, いくらでも合同変換を作れるような気がしてしまいがちですが, これらの変換により R の頂点のうつる先を少し考えてみれば $rtr = t, rtrt = e, r^2tr^3tr^2t = rt$ であることが分かります. ここで大事な注意ですが, rt といった「積」のような書き方をしているとはいえ, $rt = tr$ は成り立ちません. つまり, 72 度回転させてから ℓ に関して線対称移動させるのと, ℓ に関して線対称移動させてから 72 度回転させるのでは, 結果として違う変換を表します. これは, 変換 rt と tr により 5 角形 R の頂点のうつる先をそれぞれ次図のように調べることが確かめることができます. ここで, r や t でうつった先を右側にずらして描いていますが, 実際には R 自身に重なったものを見やすくするためにずらして描いていると思って下さい.



1.2 円の対称性

次に、円 C を C 自身にうつす合同変換全体の集まり D_∞ を考えてみます。この場合には、中心のまわりの角度 θ の回転を r_θ とおくと、 θ がどんな実数（角度）であっても r_θ は C を C 自身にうつす合同変換になります。 r_0 は恒等変換です。また、円の中心を通る直線 ℓ をひとつ選び、 ℓ に関する線対称移動を t とおくと、 t も C を C 自身にうつす合同変換です。結局、円 C を C 自身にうつす合同変換の集まりは

$$D_\infty = \{r_\theta \ (0 \leq \theta < 360), r_\theta t \ (0 \leq \theta < 360)\}$$

であることが分かります。正 5 角形 R を R 自身にうつす合同変換の集まり D_5 は 10 個の変換から成っていましたが、円 C を C 自身にうつす合同変換全体の集まり D_∞ は無数の変換から成っていることが分かります。円の方が正 5 角形より沢山の対称性を持っている、といえるのです。

1.3 合同変換の性質

さて、ここまで正 5 角形と円を自分自身にうつす合同変換全体の集まり D_5, D_∞ を調べてきましたが、これらのどちらにも共通する性質をいくつかまとめてみます。

- (0) 任意の 2 つの合同変換 r, s が与えられたとき、それらを組み合わせて新たな変換 rs を作ることができる。

つまり、変換 r を施してから引き続き変換 s を施すという一連の変換は、それ自体また合同変換になっているので、これを 1 つの変換とみなし rs と表すことができる、という意味です。

- (1) 任意の合同変換 r, s, t に対し、 $(rs)t = r(st)$ が成り立つ。

これはつまり、一連の変換 rs や st をそれぞれ 1 つの変換だと思い、変換 rs を施してから引き続き変換 t を施すのと、変換 r を施してから引き続き変換 st を施すのとでは、結果として同じ変換が得られるということを意味しています。ほとんど当たり前ですね。

- (2) 恒等変換 e はすべての合同変換 r に対し $er = re = r$ を満たす。

恒等写像 e は「何も動かさない」という変換でしたので、これも当たり前ですね。

- (3) 任意の合同変換 r に対し、その逆変換を r^{-1} と表せば、 $rr^{-1} = r^{-1}r = e$ が成り立つ。

ここで、変換 r の逆変換とは、変換 r の表す移動を「逆再生」することにより得られる変換、つまり r によってうつされた点をもとの点にうつすことにより得られる変換のことをいいます。

なぜこのような当たりの性質をわざわざ並べるのだろう、と不思議に思われるかも知れませんが、これらの性質は、次章で紹介する群という数学概念の定義にそのままつな갑니다。

さて、花や雪の結晶、日本の伝統的な紋様から最近では東京オリンピックのエンブレムまで、私たちの身の周りには様々な対称性を持つ形が溢れています。この公開講座をお引き受けすることが決まってからの数か月間、私は日頃何気なく目にしてきた花の形を写真に収めることにしてみました。それらのうちのほんの一部を紹介します。これらの形にどんな対称性が潜んでいるか、皆さんも調べてみて下さい。



2 群

2.1 群とは

前章の終わりに、図形の対称性、つまり図形からその図形への合同変換の集まりは、群という言葉で記述されることを予告しました。そこで、まずはじめに、群という概念の正確な定義を紹介します。

まず、ある条件を満たすものの集まりを**集合**とよび、集合を作っている個々のものを**元 (げん)** とよびます。これを踏まえた上で、集合 G が次を満たすとき、 G を**群 (ぐん)** とよびます。

- (0) G の任意の 2 つの元 r, s に対し、 r と s の**積**とよばれる G の元 rs が定められている。
- (1) G の任意の元 r, s, t に対し、 $(rs)t = r(st)$ が成り立つ。
- (2) **単位元**とよばれる G の元 e が存在し、 G の任意の元 r に対し、 $er = re = r$ が成り立つ。
- (3) G の任意の元 r に対し、その**逆元**とよばれる G の元 r^{-1} が存在して、 $rr^{-1} = r^{-1}r = e$ が成り立つ。

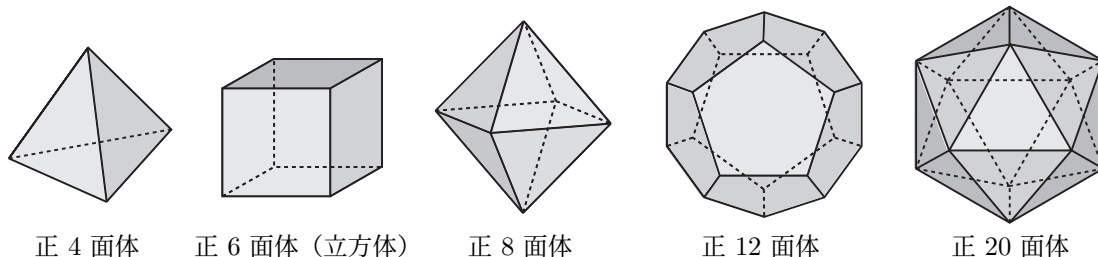
一般には $rs = sr$ が成り立つとは限らないことに注意して下さい。群 G の元 r に対し、その n 個の積 $rr \cdots r$ を r^n と表します。 r^n が単位元 e となるような自然数 n が存在するとき、そのような n のうち最小のものを r の**位数**とよびます。 $r^n = e$ となる自然数 n が存在しないときは、 r の位数は**無限である**といいます。また、群 G の部分集合 S があって、 G の任意の元を、 S の元とその逆元のいくつかの積で表すことができるとき、 G は S により**生成 (せいせい) される**といいます。またこのとき、 S を G の**生成元集合**とよびます。

例を使って定義をおさらいしてみます。第 1 章では、正 5 角形と円の対称性を調べました。正 5 角形 R を R 自身にうつす合同変換全体の集合 D_5 は確かに群の構造を持っています。中心のまわりの 72 度回転を r 、直線 ℓ に関する線対称移動を t とおいていたことを思い出して下さい。例えば、恒等写像 e は D_5 の単位元であることは明らかですし、 r の逆元 r^{-1} は r^4 です。実際、 $rr^4 = r^4r = e$ ですね。同様に、 r^2 の逆元 $(r^2)^{-1}$ は r^3 です。 r の位数は 5、 t の位数は 2 です。また、 D_5 は $\{r, t\}$ により生成されます。

円 C を C 自身にうつす合同変換全体の集合 D_∞ も同様に群の構造を持ちます。中心のまわりの角度 θ の回転 r_θ の位数は、 θ が有理数のときは有限ですが、 θ が無理数のときは無限になります。直線 ℓ に関する線対称移動 t の位数は 2 です。少し難しいですが、 D_∞ は例えば集合 $\{r_\theta, t \mid 0 \leq \theta \leq 1\}$ により生成されます。 D_5 の場合と異なり、実は群 D_∞ を生成する有限集合は存在しません。

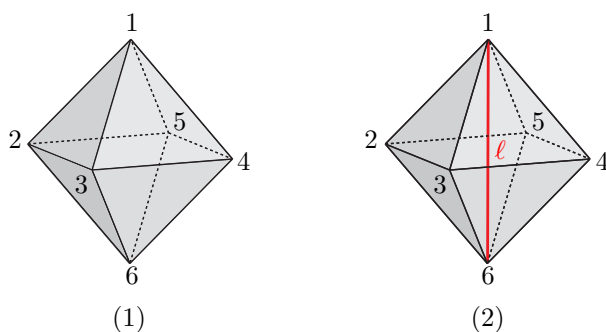
2.2 正多面体群

正多面体とは、すべての面が合同な正多角形からなり、すべての頂点のまわりに同じ数の面が集まっている凸な多面体のことをいいます。各頂点に集まる面の内角の総和は 360 度未満であることに注意すれば、正多面体は下図にある正 4 面体、正 6 面体（立方体）、正 8 面体、正 12 面体、正 20 面体に限ることが分かります。このことは古代ギリシャ時代から知られていたようです。興味のある方は是非自分で考えてみてください。



正 n 面体に対して、中心のまわりの回転の組み合わせで、その多面体を自分自身にうつす変換全体が作る群を**正 n 面体群**とよび、 P_n と表します。ここで、平面図形である正 5 角形や円に対して線対称移動を考えたのだから、立体図形である正多面体に対しても回転だけでなく面対称移動なども考えた方がいいのではないか、と思われた方がいるかも知れません。これは非常に素晴らしい感覚ですが、ここではとりあえず回転移動のみを考えることにします。気になる方は、第 3.3 節でこのことに少し触れますので、それまでお待ち下さい。

では、 P_n はどのくらいの大きさの集合でしょうか？ $n = 8$ のとき、つまり正 8 面体群を例にとって調べてみます。まず、正 8 面体の頂点に下図の (1) のように 1 から 6 まで番号を振ります。 P_8 の元のうち、頂点



1 を頂点 1 にうつす回転移動は、図の (2) にある軸 ℓ (頂点 1 と中心を通る軸) に沿った 90 度回転を r とおくと、 e, r, r^2, r^3 のいずれか (ただし、 e は恒等変換) に限りますから、4 通りあります。これは頂点 1 に集まる面の数と一致していることに注意して下さい。同様に、各 $i = 2, 3, \dots, 6$ について、頂点 1 を頂点 i にうつす回転移動は、頂点 i と中心を通る軸に関する回転分だけ自由度がありますから、各 $i = 2, 3, \dots, 6$ について 4 通りずつあります。もう少し詳しく説明します。頂点 1 を頂点 i にうつす回転移動を 1 つ好きに選び f_i とおきます。このような f_i は必ず存在しますね。すると、頂点 1 を頂点 i にうつす回転移動は $f_i, rf_i, r^2f_i, r^3f_i$ の 4 通りあります。したがって、 P_8 の元の数 は $4 \cdot 6 = 24$ であることが分かります。

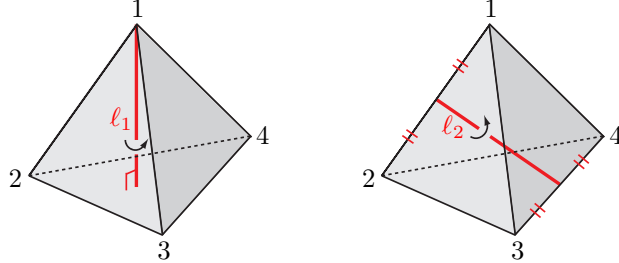
他の正多面体に対しても全く同じように考えることで、結局 P_n の元の個数は

$$(1 \text{ つの頂点に集まる面の数}) \times (\text{頂点の数})$$

であることが分かります。つまり、 P_4 の元の個数は $3 \cdot 4 = 12$, P_6 の元の個数は $3 \cdot 8 = 24$, P_{12} の元の個数

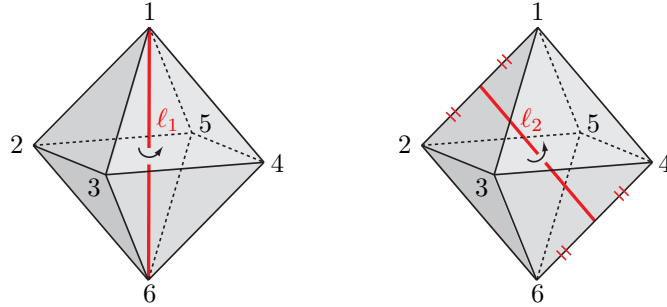
は $3 \cdot 20 = 60$, P_{20} の元の個数は $5 \cdot 12 = 60$ です.

それでは, 各正多面体について, P_n がどのような群になっているかももう少し詳しく見ていきます. まず正 4 面体から始めます. 次の図の軸 ℓ_1 に関する 120 度回転を r , 軸 ℓ_2 に関する 180 度回転を s とおきます.



r と s の位数はそれぞれ 3, 2 です. 変換 s により, 頂点 1 は頂点 2 の位置に動きます. また, 変換 sr を考えてみますと, この変換により頂点 1 は頂点 3 の位置に動きます. 実際, 変換 s によって頂点 1 は頂点 2 の位置に動き, また, 変換 r によって頂点 2 は頂点 3 の位置に動きます. したがって, 変換 s を施してから引き続き変換 r を施すと, 頂点 1 は (頂点 2 を経由して最終的に) 頂点 3 の位置に動くことが分かりました. 同様に, 変換 sr^2 によって頂点 1 は頂点 4 の位置に動きます. 先ほどの P_8 の元の数の数えるときに使った考え方を思い出すと, P_4 の元のうち, 頂点 1 を頂点 1 にうつすものは $\{e, r, r^2\}$, 頂点 1 を頂点 2 にうつすものは $\{s, rs, r^2s\}$, 頂点 1 を頂点 3 にうつすものは $\{sr, r(sr), r^2(sr)\}$, 頂点 1 を頂点 4 にうつすものは $\{sr^2, r(sr^2), r^2(sr^2)\}$ であることが分かります. まとめて, P_4 の元の集合を $\{e, r, r^2, s, rs, r^2s, sr, rsr, r^2sr, sr^2, rsr^2, r^2sr^2\}$ と書き下すことができます. P_4 のどの元も, s と r のいくつかの積で表せていることに注意して下さい. つまり P_4 は $\{r, s\}$ により生成されることが分かりました.

次に正 8 面体を考えてみます. 下図の軸 ℓ_1 に関する 90 度回転を r , 軸 ℓ_2 に関する 180 度回転を s とおきます. 正 4 面体のときと同様に考えると, 次のことが分かります (皆さんも是非自分の手で確かめて下さい).

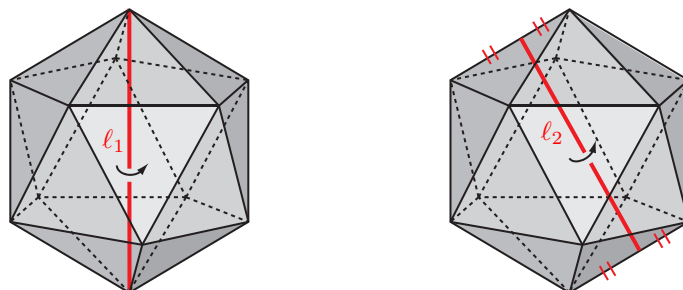


- 変換 s により, 頂点 1 は頂点 2 の位置に動く.
- 変換 sr により, 頂点 1 は頂点 3 の位置に動く.
- 変換 sr^2 により, 頂点 1 は頂点 4 の位置に動く.
- 変換 sr^3 により, 頂点 1 は頂点 5 の位置に動く.
- 変換 sr^2s により, 頂点 1 は頂点 6 の位置に動く.

つまり, 先ほどの f_i を $f_2 = s, f_3 = sr, f_4 = sr^2, f_5 = sr^3, f_6 = sr^2s$ のようにとることができます. したがって, P_8 は $\{r, s\}$ により生成されることが分かりました. P_8 の元の数 は 24 個ですが, これをすべて書き出すと次のようになります:

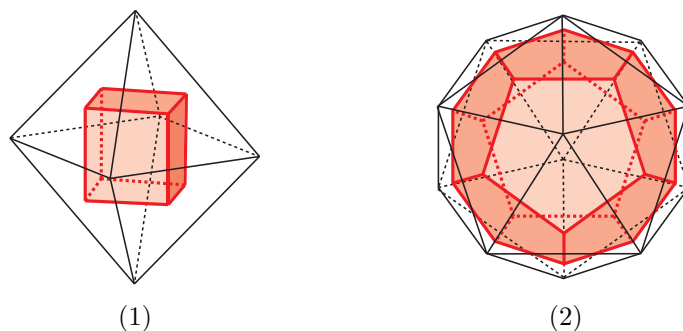
$$P_8 = \left\{ e, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s, sr, rsr, r^2sr, r^3sr, sr^2, r^2sr^2, r^3sr^2, sr^3, r^3sr^3, r^2sr^3, r^3sr^3, sr^2s, r^2sr^2s, r^3sr^2s, r^3sr^2s \right\}.$$

正 20 面体について細かくは説明しませんが、下図の軸 ℓ_1 に関する 72 度回転を r , 軸 ℓ_2 に関する 180 度回転を s とおくと、やはり P_{20} は $\{r, s\}$ により生成されることが分かります。 r と s のいくつかの積により



頂点 1 を他の好きな頂点にうつせることをいえばいいので、興味のある方は実際に確かめてみて下さい。

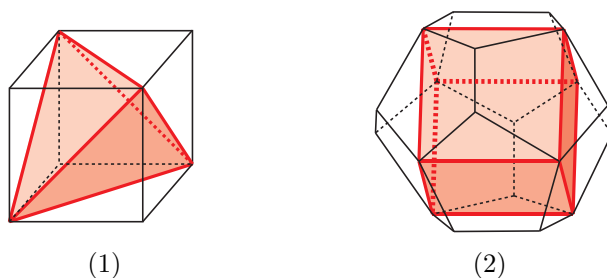
さて、正多面体は全部で 5 つあったのですが、立方体と正 12 面体についてはまだ何も調べていませんでした。しかし、これまでの考察にひとつアイデアを加えると、簡単に求めることができます。下図 (1) のように、正 8 面体の各面の中心を結ぶと、立方体 that 得られます。逆に、立方体の各面の中心を結ぶと、正 8 面体 that



得られます。(このような関係を**双対 (そうつい) 関係**とよびます。) したがって、正 8 面体を正 8 面体自身にうつす回転移動は、立方体を立方体にうつし、立方体を立方体にうつす回転移動は、正 8 面体を正 8 面体にうつします。結局、 P_6 と P_8 は全く同じ群であるということが分かりました。

同じように、正 12 面体と正 20 面体は、互いに双対関係にあります。つまり、上図 (2) のように、正 20 面体の各面の中心を結ぶと、正 12 面体 that 得られます。逆に、正 12 面体の各面の中心を結ぶと、正 20 面体 that 得られます。したがって、 P_{12} と P_{20} は全く同じ群です。ちなみに、正 4 面体に対して双対となる多面体を調べてみると、これはまた正 4 面体になります。

最後に、3 つの群 P_4 , $P_6(= P_8)$, $P_{12}(= P_{20})$ の関係をもう少しだけ調べてみます。次図 (1) のように立方体の 4 つの頂点を結ぶことにより、正 4 面体 that 得られます。したがって、正 4 面体を正 4 面体自身にうつす



回転移動は、立方体を立方体にうつします。(この逆は成り立ちません。つまり、立方体を立方体自身にうつ

す回転移動であっても、上図に描かれた正 4 面体をその正 4 面体自身にうつすとは限りません。) このことから、群 P_6 の中には、群 P_4 が隠れていることが分かりました。このようなとき、数学では、群 P_4 は群 P_6 の**部分群**であるといい $P_4 < P_6$ と表します。

また、上図 (2) のように正 12 面体の 6 つの頂点を結ぶことにより、立方体が得られます。したがって、群 P_6 は群 P_{12} の部分群です。以上より結局

$$P_4 < P_6 = P_8 < P_{12} = P_{20} < P_\infty$$

であることが分かりました。特に、立方体と正 8 面体、正 12 面体と正 20 面体は、それぞれ全く同じ「対称性」を持っていることが分かりました。ここで、筆がすべって P_∞ という群も並べて書いてしまいました。これは、これまでと同じ視点で球面の対称性を記述した群で、**特殊直交群**とよばれています。 D_∞ の場合と同様に、 P_∞ は無限個の元を持つ群で、しかも有限個の元からなる集合で生成することはできません。

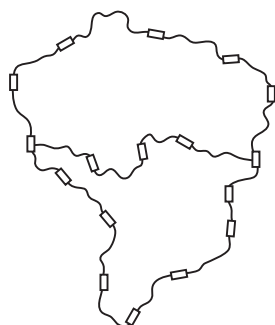
3 トポロジーの視点

これまでの話では、線対称移動、回転移動、平行移動などを組み合わせて得られる変換（合同変換）でうつり合う図形はどれも同じ図形だとみなすユークリッド幾何学の視点に基づき、いろいろな図形の対称性（合同変換のつくる群）を観察してきました。これからする話では、この見方を根本から変えます。

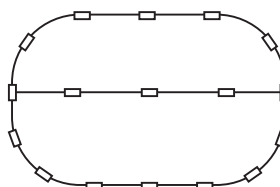
3.1 同相写像

図形が「同じ」だとみなすこれまで厳しかった基準をうんと甘くして「曲げたり伸ばしたりひねったりしてうつり合う図形はどれも同じ図形だ」とみなすことにします。もう少し正確に説明しますと、図形 X から図形 Y への 1 対 1 の点对応であって、 X 内のつながっている曲線のうつつた先は Y 内で必ずつながっており、逆に X 内の切れた曲線のうつつた先は Y 内で必ず切れている、という条件を満たすものを X から Y への**同相写像**といいます。そして、合同変換のことはすっかり忘れて、同相写像でうつり合う図形は「同じ」だ、とみなすのが**トポロジー**の考え方です。ユークリッド幾何学では、図形が固い鉄柱や鉄板でできているかのようにみなしていたのに対し、トポロジーでは、図形がゴムひもやゴム膜でできているとみなし、長さや歪みや角度などといった違いには目を向けません。すると多角形と円は同じ形、多面体と球は同じ形、ということになります。ユークリッド幾何学の基準と比べてこの基準が如何に甘いかが分かります。まるで、職場では厳しい上司の顔をしていた人が、自宅に帰った途端に急に優しいパパの顔になった、といった感じです。

このような「甘すぎる」基準は奇妙に思えるかも知れませんが、私たちの日常生活の中でも実はよく利用されています。例えば電車の路線図を思い出して下さい。線路は実際にはくねくね蛇行していますし、駅間の線



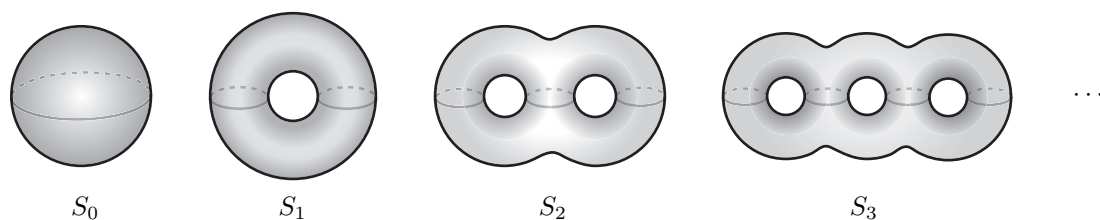
実際の地図



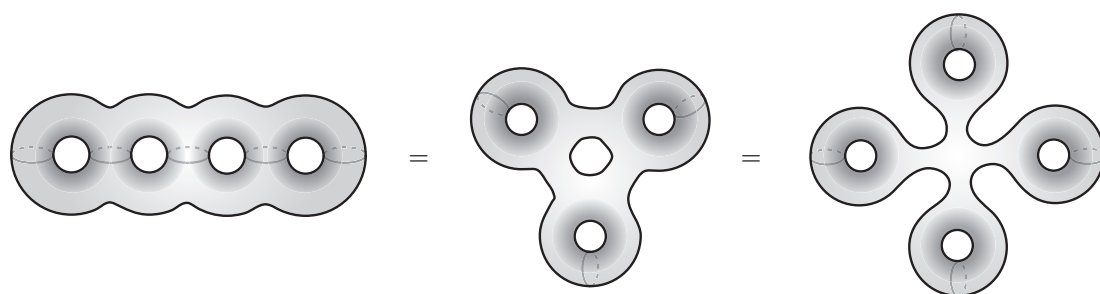
路線図

路の長さもバラバラです．ところが，私たちが通常目にする路線図では，そういった情報は無視して，つながり具合だけを気にしながら簡略化されています．「つながっているところはつながっている，つながっていないところはつながっていない」というルールさえ守れば，つまり，「トポロジーの視点で同じ図形」であることにさえ気をつければ，線路の形を好きに変形して見やすくした方が便利なのが多いのです．

これから考えるのは，トポロジーの視点からみた図形の対称性です．図形としては，下図に描かれている閉曲面 S_g （ただし， g は負でない整数）を考えます．閉曲面とは，薄いゴム膜でできた切り口のない図形のこと



だと思って下さい． S_0 は球面です．つまり，薄いゴムボールです． S_1 はトーラスとよばれる曲面です．通常の浮き輪を想像して下さい．同様に， S_2 は2 乗りの浮き輪のような図形です．一般に， S_g は g 人乗りの浮き輪のような図形を表します． S_g のことを，種数 g の閉曲面とよびます．下図に描かれている図形はすべて種数 4 の閉曲面 S_4 です．図形をゴム膜だと思って一方をグニャグニャ変形すれば他方の形に変形できます

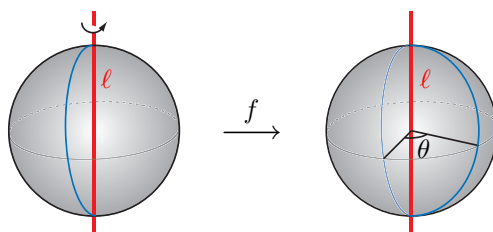


から，これらは見た目は違えど，トポロジーの視点ではみな同じ図形なのです．

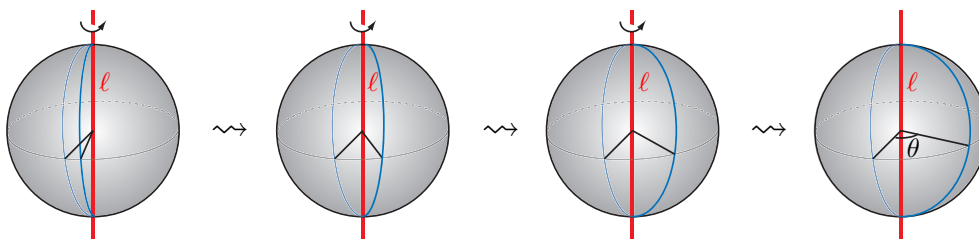
3.2 イソトピー

閉曲面 S_g を S_g 自身にうつす同相写像を考えます．同相写像というのは，合同変換と比べてかなり大雑把な変換のことをいいました．これからは，2 つの同相写像が「同じ」である，という言葉の意味も緩めてみます． f を S_g を S_g 自身にうつす同相写像とします．復習しますと， f は S_g から S_g 自身への 1 対 1 の点対応であって， S_g 内のつながっている曲線のうつった先は必ずつながっており，逆に S_g 内のつながっていない曲線のうつった先は必ずつながっていない，という条件を満たしています．ここで，例えば， f によって S_g の点たちをうつしたあとで， S_g をゴム膜だと思い， S_g のある点を指で押さえて膜に沿ってどちらかの方向にずるずると動かしてできる変換を h とおきます．このとき， f と h は「同じ」写像だとみなすことにします．もう少しだけ詳しく述べますと， f によって S_g の点たちをうつしたあとで，引き続き S_g を S_g という図形内でずるずると連続的に変形することで得られる同相写像を h とおくと， f と h はイソトピックであるといい，イソトピックである 2 つの同相写像は「同じ」とみなすことにします．ここでいう「図形内の連続的な変形」のことを，数学ではイソトピーとよびます．イソトピーによる変形は，ちょうど，晴れた日に飛ばした静止したシャボン玉の中で，玉虫色に輝く石鹼模様がうねうねと動いている状況に似ています．

例を見てみます．球面上の点をどこも動かさないという対応（恒等写像）を e とすると， e は明らかに S_0 を S_0 自身にうつす同相写像です．また，下図にある軸 ℓ に沿った角度 θ の回転を f とすると， f もまた S_0 を S_0 自身にうつす同相写像です．

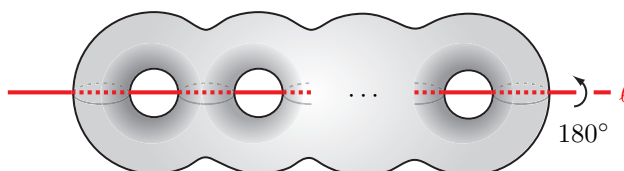


ここで， e を施した後（この例の場合は e は何も動かさない，という写像でした）で次の図のように軸 ℓ に沿って少しずつ回転させるという変換（**イソトピー**）を施していくと， f が得られます．したがって， e と f



はイソトピックですので，これからは「同じ」同相写像だとみなすのです．

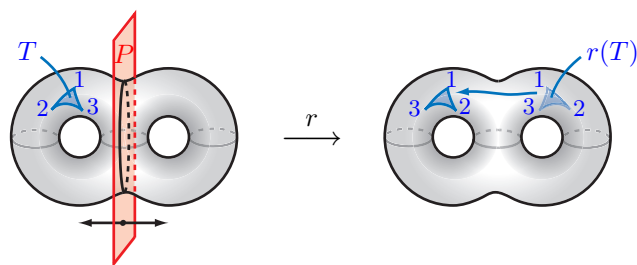
この例をみると，曲面 S_g から S_g への同相写像はすべて「同じ」になってしまうのではないかと心配する方もいるかも知れませんが，安心して下さい． g を自然数とし， h を下図の軸 ℓ に沿った 180 度回転により得られる S_g から S_g への同相写像とします．この写像 h には**超楕円対合**という特別な名前が付けられています．実は，恒等写像 e と超楕円対合 h はイソトピックではないことが知られています．皆さんの中には，先ほど



の球 S_0 の例のときのように， e を施した後に直線 ℓ に沿って少しずつ回転させていけば h が得られるんじゃないかと思われた方もいるかも知れませんが，直線 ℓ に沿って少しずつ回転させていくと，その途中で S_g は S_g からはみ出てしまい，180 度回転して初めてまた S_g 自身に重なります．こういうのはだめなのです．

3.3 向きを保つ同相写像

第 2.2 節で多面体群を考えた際，合同変換として平面に関する面対称移動は考えず，中心のまわりの回転の組合せのみを考えました．同じように，閉曲面 S_g から S_g 自身への同相写像を考えると，1 つだけ制限を加えます．それは，「向きを保つ同相写像のみを考える」というものです．簡単に説明してみます．次の図にある平面 P での面対称移動によって得られる曲面 S_2 から S_2 への同相写像を r とします．ここで， S_2 の



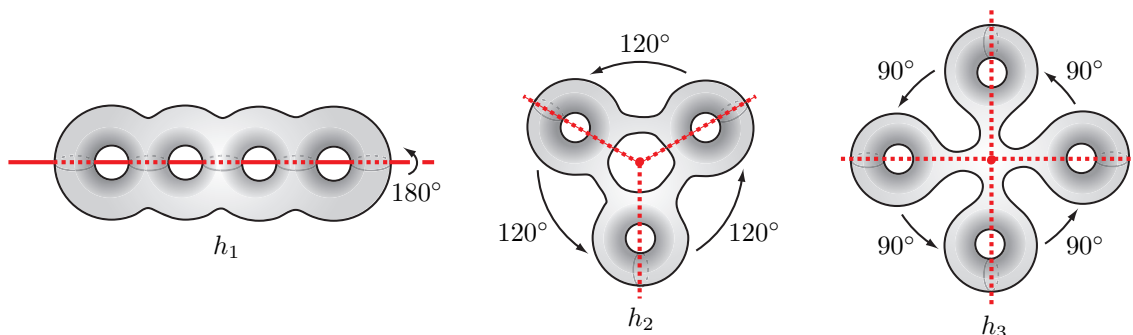
上に小さな（歪んだ）3 角形 T を描き、3 頂点に図のように 1, 2, 3 と番号を振ります．同相写像 r により、3 角形 T は別の（歪んだ）3 角形 $r(T)$ にうつります．3 角形 $r(T)$ の頂点には、3 角形 T の対応する頂点と同じ番号を振ります．3 角形 $r(T)$ を曲面 S_2 の上でするすると滑らせて元の 3 角形 T に重ねてみます．このとき $r(T)$ の頂点 1 が T の頂点 1 に重なるようにします．すると $r(T)$ の頂点 2 は T の頂点 3 と重なり、 $r(T)$ の頂点 3 は T の頂点 2 と重なってしまいますので、頂点番号を含めて $r(T)$ と T をぴったり重ねることはできません．このようなとき、写像 r は**向きを保たない**といいます．

逆に、曲面 S_g から S_g 自身への同相写像 f が**向きを保つ**とは、上のような方法で小さな 3 角形 T とそのうつった先の 3 角形 $f(T)$ が、頂点の番号を込めてぴったり重ね合わせることができることをいいます．

話を第 2.2 節に戻しますが、多面体からその多面体自身への合同変換 s を、多面体の表面から多面体の表面への同相写像とみなしたときに向きを保っているとき、その合同変換 s は向きを保つといいます．実は、多面体群とは多面体の向きを保つ合同変換が作る群のことである、ということが出来ます．

4 写像類群

第 1, 2 章では、ユークリッド幾何学の視点で、図形をその図形自身にうつす合同変換全体の作る群を調べてきました．第 3 章で扱った閉曲面 S_g を S_g 自身にうつす同相写像全体の作る集合も群の構造を持ちます．この群を**写像類群**とよび、 $\mathcal{M}_g$ と表します．ここで、第 3.2 節で説明したように、2 つの同相写像はぴったり一致していなくても、イソトピックであれば「同じ」とみなします．また、第 3.3 節で触れたように、曲面の向きを保たない写像は考えないことにします．写像類群は「トポロジーの視点から見た図形 S_g の対称性を記述する群」であるということが出来ます．例えば、次の図に表されている同相写像 h_1, h_2, h_3 はそれぞれ写像類群 $\mathcal{M}_4$ の元です． h_1 （超楕円対合）を 2 回続けて施せば、恒等写像 e が得られます．したがって、 h_1 の位数



は 2 です．同様に、 h_2 の位数は 3、 h_3 の位数は 4 です．写像類群の元は、確かに図形 S_g をトポロジーの視点で眺めたときに見つかる対称性を表している、といえることが何となくお分かりいただけたのではないかと思います．

4.1 デーンツイスト

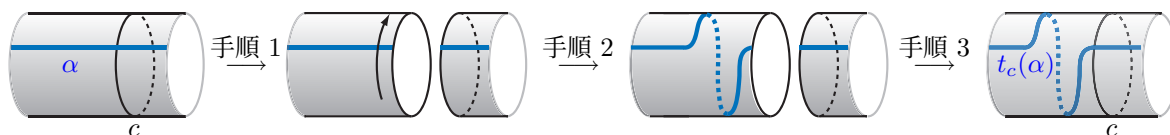
ここでは、閉曲面 S_g から S_g 自身への同相写像を簡単に作る方法を 1 つ紹介します。

閉曲面 S_g の中にある自己交差のない閉じた曲線を好きに選び c とおきます。閉じた曲線，という意味が良く分からない方は， c を S_g の上に乗った輪ゴムだと思って下さい。このとき，次の操作を考えます。

手順 1 曲面 S_g を曲線 c に沿って切り開く。

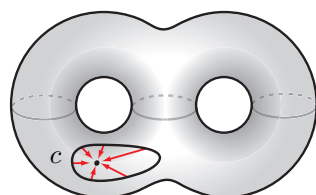
手順 2 切り口の一方を右手でつかみ，360 度振る。

手順 3 振ったまま c に沿って切り口を貼り戻す。

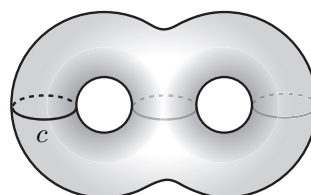


このようにして得られる S_g から S_g 自身への同相写像を c に沿った**デーンツイスト**とよび， t_c と表します。デーンツイスト t_c によって，上図に描かれた曲線 α は，新たな曲線 $t_c(\alpha)$ にうつされます。 $t_c(\alpha)$ はもとの曲線 α を c 方向に振って得られる曲線で，もとの α より「伸びて」いますが， $t_c(\alpha)$ もまた切れていない曲線です。曲線のつながりを保存する 1 対 1 対応が同相写像の定義であったことを思い出すと， t_c は確かに S_g を S_g 自身にうつす同相写像であることが分かります。「デーンツイスト」という名前は，ドイツやアメリカで活躍した M. デーンという数学者に因んでいます。ツイストというのは「振り」という意味ですね。

デーンツイスト t_c は写像類群 M_g の元としてどのような性質を持つでしょうか？ 曲線 c を曲面 S_g からはみ出ることなくすると 1 点に縮めることができるときは， t_c は恒等写像 e とイソトピック，つまり $t_c = e$ になることが分かります。そうでない場合，つまり， c を曲面 S_g からはみ出ることなしに，絶対に 1 点には縮めることができないときには， t_c の位数は無限であることが知られています。このときは， t_c を繰り返し



この c は 1 点に縮めることができる



この c は 1 点に縮めることができない

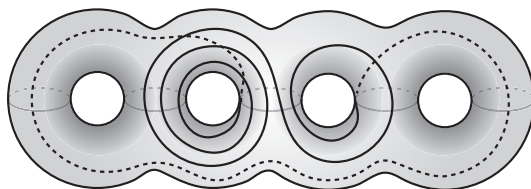
施せば施すだけ，つまり， c に沿って振れば振るだけ M_g の新しい元をどんどん作り出すことができるのです。また，「手順 2」での振り方向を逆にしたものが t_c の逆元 t_c^{-1} です。

4.2 リコリッシュの定理

さて，第 3.2 節では，球面 S_0 の軸 ℓ に沿った回転により得られる写像類群 M_0 の元は，恒等写像 e (S_0 の点をどこも動かさないという対応) と「同じ」だということを見ました。実は，このような回転に限らず， S_0 から S_0 自身への向きを保つどんな同相写像も恒等写像 e とイソトピックであることが知られています。つまり， $M_0 = \{e\}$ です。第 2.2 節で観察した正多面体 (の表面) は，ユークリッド幾何学の視点では様々な対称性があったのですが，正多面体 (の表面) はどれも球面 S_0 と同相ですので，トポロジーの視点では恒等写像以外の対称性はありません。球面という図形はトポジスト (トポロジーの研究者) にとって，あまりに

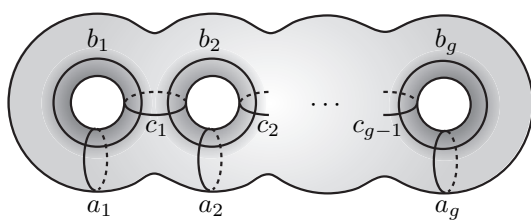
単純過ぎてしまうことが原因です。これはちょうど、ユークリッド幾何学において、1点という図形の合同変換が恒等写像しかないことと比較されます。

では、他の閉曲面 S_g についてはどうでしょうか？ 例えば、種数 4 の閉曲面 S_4 を考えますと、下図のような複雑な曲線に沿ったデーンツイストも写像類群 $\mathcal{M}_4$ の元ですし、本章の冒頭の例で見た写像 h_1, h_2, h_3 な



ども $\mathcal{M}_4$ の元です。写像類群には実に沢山の元がありそうです。ところが、イギリスのケンブリッジ大学の数学者 W. B. R. リコリッシュは、次の定理を証明しました。

リコリッシュの定理 写像類群 $\mathcal{M}_g$ は下図にある $3g - 1$ 個の曲線 $a_1, a_2, \dots, a_g, b_1, b_2, \dots, b_g, c_1, c_2, \dots, c_{g-1}$ に沿ったデーンツイストにより生成される。

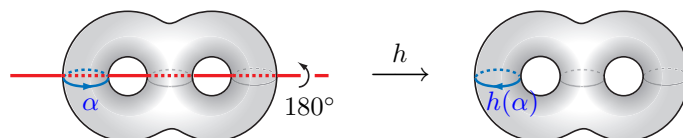


定理の主張は、閉曲面 S_g を S_g 自身にうつし向きを保つどんな同相写像も、デーンツイスト $t_{a_1}, t_{a_2}, \dots, t_{a_g}, t_{b_1}, t_{b_2}, \dots, t_{b_g}, t_{c_1}, t_{c_2}, \dots, t_{c_{g-1}}$ とそれらの逆元のいくつかの積として表すことができるということを意味しています。このことは、第 2.2 節で扱った多面体群 P_n がそれぞれ r と s という 2 つの元で生成されていたことと比較されます。ただし、多面体群 P_n が有限個の元を持つ群であったのに対し、一般に写像類群 $\mathcal{M}_g$ は無限個の元を持つうんと大きな群です。無数にある $\mathcal{M}_g$ の元のうちどれを選んでも、(例えば、すごく複雑な曲線に沿ったデーンツイストも、また超楕円対合のような、デーンツイストから作られるようには見えない同相写像も) 必ず上記デーンツイストの有限個の積として表すことができます。

例として、種数 2 の閉曲面 S_2 に対する超楕円対合 h を考えてみますと、これは上記デーンツイストの積で

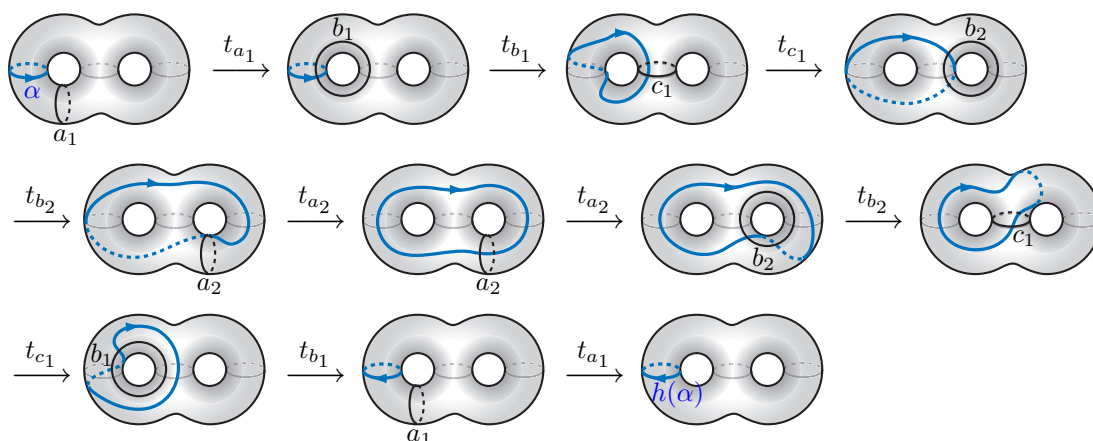
$$h = t_{a_1} t_{b_1} t_{c_1} t_{b_2} t_{a_2} t_{a_2} t_{b_2} t_{c_1} t_{b_1} t_{a_1}$$

のように表せることが知られています。このことの状況証拠を少しだけ観察してこの章を終えたいと思います。下図のように閉曲面 S_2 上に向きを付けた閉曲線 α をとると、これを h によってうつしたもの $h(\alpha)$ は、 α 自身と向きを反対にしてぴったり重なります。ここで h と $t_{a_1} t_{b_1} t_{c_1} t_{b_2} t_{a_2} t_{a_2} t_{b_2} t_{c_1} t_{b_1} t_{a_1}$ は同じ (イソト



ピック) なわけですから、 $t_{a_1} t_{b_1} t_{c_1} t_{b_2} t_{a_2} t_{a_2} t_{b_2} t_{c_1} t_{b_1} t_{a_1}$ で α うつしても、 α 自身と向きを反対にしてぴったり重ねられる筈です。そこで、実際に α のうつった先を追いかけてみると、次の図のようになり、確かに $h(\alpha)$ と一致することが確かめられました。ここで、各デーンツイストを行った際、イソトピーで写像を変形するこ

とはかまわないというルールがありましたので、 α のうつった先を見やすくするためにそれぞれのステップでイソトピーによる補正を加えています。



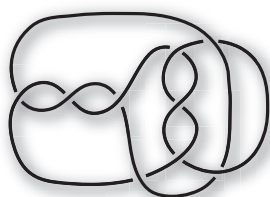
5 結びに

第2章の冒頭で紹介した群の定義を一瞥しただけでは、いかにも抽象的で無味乾燥な数学概念であるように見えてしましますが、実際には、群というのは「自然界に溢れる対称性という美しさを数学の言葉を使って普遍的なものにしたい」という数学者達の心がはぐくんできた概念であるといえます。

本稿では、いくつかの図形の対称性を作る群について、特にそれらの生成元集合に焦点を当てて説明してきました。皆さんは、ルービックキューブという立方体パズルを知っていますか？ 各面が $3 \times 3 = 9$ 個の色の付いた正方形で構成されていて、各列ごとに自由に回転させて遊ぶゲームです。色がバラバラに散った状態からはじめて、一定の操作で各面の色をそろえることができればゴールです。自分なりの解き方を持っている方は、おそらくいくつかの基本操作を見つけていて、それらを順に施していくだけでどんな状態からスタートしても機械的にゴールまでたどり着ける筈です。これら基本操作を見つけないということが、実は群の生成元を見つけないことに対応しています。正多面体を自分自身に重ねる回転移動が1つ与えられたときには、それに第2.2節で与えた基本操作 r と s の逆操作 r^{-1} と s^{-1} を適切に組み合わせて施すことで恒等写像に戻すことができるわけで、具体的にどのように組み合わせれば良いかという問題を考えることはルービックキューブを解くのととても似ていますね。写像類群 M_g についても、リコリッシュの定理により、どんな同相写像が与えられたとしても、 $3g - 1$ 個のデーンツイスト（とその逆元）を上手く組み合わせて施すことで恒等写像に戻すことができるわけですが、具体的にこの組み合わせを見つけないのはルービックキューブや多面体のときと比べて格段に難しいです。これについては、明治大学の阿原一志先生が「Teruaki」というゲームソフトを作られています。Web サイト <http://www51.atwiki.jp/kazushiahara/pages/32.html> から無料でダウンロードできますので、興味のある方は是非遊んでみて下さい。

写像類群がデーンツイストたちで生成されることがどの様な数学につながっていくのか、ということについて、1つだけその応用例を大雑把に紹介します。皆さんは、宇宙の形について想像したことがあるでしょうか？ 宇宙の誕生直後の膨張のスピードは光よりも早かったとされているため、宇宙の果てを光学的に観測することは原理的に不可能だそうです。しかし、ある宇宙物理学者によると、宇宙に始まりがあったことから、宇宙全体の体積は有限であると仮定した方が自然で、また、果てに壁があるようなモデルは不自然なので、ちょうど2次元世界でいうところの閉曲面のように、どの1点をとってもそのすぐ近くだけ見渡すと平

らに広がっているように思えるけど、全体としては「曲がって」いるような空間モデルを想定するのが自然だそうです。このような空間モデルは**閉 3 次元多様体**とよばれています。第 4.2 節で紹介したリコリッシュは、リコリッシュの定理を使って「任意の（向き付可能な）閉 3 次元多様体は、3 次元球面内の絡み目に沿ったデーン手術により得られる」という定理を証明しました。（同時期に、ウォレスという数学者も同じ事実を証明したので、この定理はリコリッシュ・ウォレスの定理とよばれています。）ここで **3 次元球面**というのは、球面 S_0 の「3 次元版」といえる空間で、最も基本的な閉 3 次元多様体です。**絡み目**というのは、いくつかの閉じた曲線が絡まり合って作られる図形です。そして、**デーン手術**というのは、絡み目を使って空間を「切ったり貼ったり」して別の新しい空間を作る操作です。絡み目は生物の DNA にもみられるとても素朴な図形ですが、そんな小さな図形の性質を考えることで、宇宙全体の形の候補をもれなく調べることができるのです。



絡み目の例

最後に、本稿を書く際に参考にした本を文献案内をかねて紹介します。まず、多面体についてより深く知りたいという方には

- [1] 川村みゆき、『多面体の折紙－正多面体・準正多面体およびその双対』, 日本評論社, 1995
- [2] 一松 信, 『正多面体を解く』, 東海大学出版会, 2002

をお勧めします。群論については沢山の入門書がありますが

- [3] 志賀 浩二, 『群論への 30 講』, 朝倉書店, 1989

は、特に「対称性を記述する言葉」としての群の側面を強調して解説した入門書でお勧めです。また、少し難しめの本ですが、多角形や多面体に限らず、もっと沢山の図形の対称性を作る群を解説した本として

- [4] 河野 俊丈, 『結晶群』, 共立出版, 2015

をお勧めします。トポロジーに興味を持たれた方は、専門家による易しい入門書

- [5] 川久保 勝夫, 『トポロジーの発想－〇と△を同じと見ると何が見えるか』, 講談社, 1995
- [6] 松本 幸夫, 『トポロジーへの誘い－多様体と次元をめぐる』, 遊星社, 2008

などを読むと、その雰囲気がお分かりいただけると思います。写像類群に関する日本語で書かれた入門書は、少し前まで私の知る限り 1 つもなかったのですが、2013 年に下記の本が出版されました。

- [7] 阿原 一志, 逆井 卓也, 『パズルゲームで楽しむ写像類群入門』, 日本評論社, 2013

題名から想像されるよりずっと本格的な入門書で、リコリッシュの定理の証明も詳しく解説されています。

本稿の執筆にあたり、奥田隆幸さんに原稿を読んでいただき、貴重なコメントを頂きました。心からお礼申し上げます。